

3 Измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функций. Теорема Егорова

Лемма If $f(x)$ измер., то $f(x) + C$ - измер. ($\forall C = \text{const}$)

▲ $\{f(x) + C < a\} = \{f(x) < a - C\}$ - измер. ■

Лемма If $f(x)$ измер., то $cf(x)$ - измер. ($\forall c = \text{const}$)

▲ $\{cf(x) < a\} = \{f(x) < a/c, c > 0\} \cup \{f(x) > a/c, c < 0\}$ - измер. ($c = 0 \Rightarrow \Rightarrow$ измер.) ■

Лемма If $f(x), g(x)$ - измер., то $\{f(x) < g(x)\}$ измер.

▲ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \{f(x) < g(x) + 1/k\} = \{f(x) < g(x)\}$ - измер. ■

▲ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{f(x) < g(x) - 1/k\} = \{f(x) < g(x)\}$ - измер. ■

▲ $\{f(x) + g(x) < a\} = \{f(x) < a - g(x)\}$ - измер. ■

Сл. сумм/комб. измер. ф-ций - измер.

Лемма If $f(x)$ - измер., то $|f(x)|$ - измер.

▲ $\{|f(x)| < a\} \stackrel{a > 0}{=} \{f(x) < a\} \cup \{f(x) > -a\}$ - измер. ■

▲ $\{0, a < 0\}$

Лемма If $f(x)$ - измер., то $f^2(x)$ - измер.

▲ $\{f^2(x) < a\} = \{0, a < 0\} \cup \{|f(x)| < \sqrt{a}\}$ - измер. ■

▲ Произвед. двух измер. ф-ций - измер.

▲ $f(x)g(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$ ■

▲ Частное двух измер. ф-ций - измер.

▲ $f/g = f \cdot (1/g)$; $(g \neq 0) \cup \{1/g < a\} = \{a = 0: \{g < 0\} \cup \{g > 0\}\} \cup \{a > 0: \{g < 0\} \cup \{1/a < g\}\} \cup \{a < 0: \{1/a < g\} \cap \{g < 0\}\}$ - измер. ■

! Зам If $\mu \{h g(x) = 0\} = 0$, то f/g все равно измерима на $X \setminus \{h g(x) = 0\}$

Л (Егорова) $\square$ $f_n(x) \xrightarrow{n.b.} f(x)$ на X ; f_n, f - измеримы.
 $\mu(X) < +\infty$; Тогда $\forall \delta > 0 \exists X_\delta \subset X: \mu(X \setminus X_\delta) < \delta$
 $\leq \delta: f_n(x) \xrightarrow{X_\delta} f(x)$

▲ 1) $f_n(x) \xrightarrow{\forall x \in X} f(x)$. Введем $X_{nm} = \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}, \forall k \geq n\}$. Видно, что $X_{nm} \subset X_{n+1, m}, \forall n, m$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_{nm} = X$
 (что $\forall x \in X f_k(x) \rightarrow f(x)$; $\exists N: k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq 1/m$
 $\Rightarrow x \in X_{nm}, m \geq N$). $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(X_{nm}) = \mu(X)$, $\forall m$. Выберем

n /послед-ть X_{nm} : $\mu(X \setminus X_{nm}) \leq \frac{\delta}{2^m}$ (δ - произвол, $\delta > 0$)
 $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus X_{nm}) < \delta$. Положим $X_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{nm} \Rightarrow$
 $\Rightarrow X \setminus X_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus X_{nm})$. Покажем, что на X_δ имеет место равномер. с-ть $\forall x \in X_\delta \Rightarrow x \in X_{nm} \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq 1/m < \varepsilon, \forall k \geq n_m$. $\forall \varepsilon > 0, N = n_m, \forall k \geq N \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
 $\forall x \in X_\delta$

2) $\square f_k \xrightarrow{n.b.} f \Rightarrow \exists E \subset X: \mu(E) = 0$ и $f_k \xrightarrow{X \setminus E} f$
 $\mu(X) = \mu(X \setminus E)$ $X = X \setminus E \Rightarrow$ см. п. 1) g/X